

# Musterlösung zur Übungsklausur I

1)

$\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \vee q$						
$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \vee q$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
Ergo: Kontradiktion						

2/a)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg \neg r), p \wedge \neg r \quad \vdash \neg q$$

1	$p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg \neg r)$	$Pr$
2	$p \wedge \neg r$	$Pr$
3	$p$	$\wedge B(2)$
4	$\neg r$	$\wedge B(2)$
5	$q \Rightarrow \neg \neg r$	$\Rightarrow B(1,3)$
6	$q$	$HPr$
7	$\neg \neg r$	$\Rightarrow B(5,6)$
8	$\neg r$	$wdh(4)$
9	$\neg q$	$\neg E(6-8)$

2/b)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \vdash (p \Rightarrow) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

1	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$Pr$
2	$p \Rightarrow q$	$HPr$
3	$p$	$HPr$
4	$q \Rightarrow r$	$\Rightarrow B(1,3)$
5	$q$	$\Rightarrow B(2,3)$
6	$r$	$\Rightarrow B(4,5)$
7	$p \Rightarrow r$	$\Rightarrow E(3,6)$
8	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\Rightarrow E(2,7)$

2/c)

$r \Rightarrow p \vee q, t \Rightarrow q \vee s, \neg q$

$\vdash \neg p \wedge \neg s \Rightarrow \neg r \wedge \neg t$

1	$r \Rightarrow p \vee q$	$Pr$
2	$t \Rightarrow q \vee s$	$Pr$
3	$\neg q$	$Pr$
4	$\neg p \wedge \neg s$	$HPr$
5	$\neg p$	$\wedge B(4)$
6	$\neg s$	$\wedge B(4)$
7	$r$	$HPr$
8	$p \vee q$	$\Rightarrow B(1, 7)$
9	$\neg p$	$wdh(5)$
10	$\neg q$	$wdh(3)$
11	$\neg p \wedge \neg q$	$\wedge E(9, 10)$
12	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$DM 2$
13	$\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow B(12)$
14	$\neg(p \vee q)$	$\Rightarrow B(11, 13)$
15	$\neg r$	$\neg E(7, 8, 14)$
16	$t$	$HPr$
17	$q \vee s$	$\Rightarrow B(2, 16)$
18	$\neg q$	$wdh(3)$
19	$\neg s$	$wdh(6)$
20	$\neg q \wedge \neg s$	$\wedge E(18, 19)$
21	$\neg(q \vee s) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg s$	$DM 2$
22	$\neg q \wedge \neg s \Rightarrow \neg(q \vee s)$	$\Leftrightarrow B(22)$
23	$\neg(q \vee s)$	$\Rightarrow B(20, 22)$
24	$\neg t$	$\neg E(16, 17, 23)$
25	$\neg r \wedge \neg t$	$\wedge E(15, 24)$
26	$\neg p \wedge \neg s \Rightarrow \neg r \wedge \neg t$	$\Rightarrow E(4, 25)$

3)

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

1		$p \Rightarrow q$		<i>HPr</i>
2		$p \wedge \neg q$		<i>HPr</i>
3		$p$		$\wedge B(2)$
4		$\neg q$		$\wedge B(2)$
5		$q$		$\Rightarrow B(1)$
6		$\neg(p \wedge \neg q)$		$\neg E(2,4,5)$
7		$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$		$\Rightarrow E(1,6)$

4/a)

Jeder Kursteilnehmer kennt einen anderen Kursteilnehmer.

x ist Kursteilnehmer:  $T(x)$

x kennt y:  $K(x, y)$

$$\forall x(T(x) \Rightarrow \exists y(T(y) \wedge K(x, y)))$$

4/b)

Wenn jemand alle Aufgaben gelöst hat, bekommt er einen Schein.

x ist Aufgabe:  $A(x)$

x hat Aufgabe y gelöst:  $L(x, y)$

x bekommt einen Schein:  $S(x)$

$$\forall x((\forall y(A(y) \Rightarrow L(x, y))) \Rightarrow S(x))$$

5/a)

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$$

z.B. Hund : Haustier

5/b)

$$\forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$$

z.B. groß : klein

5/c)

$$\forall x(A(x) \Leftrightarrow \neg B(x))$$

z.B. tot : lebendig

6)

Alle Menschen sind Lebewesen.

Alle Lebewesen sind sterblich.

Also: Alle Menschen sind sterblich.

x ist ein Mensch:  $M(x)$

x ist ein Lebewesen:  $L(x)$

x ist sterblich:  $S(x)$

1	$\forall x(M(x) \Rightarrow L(x))$	$Pr$
2	$\forall x(L(x) \Rightarrow S(x))$	$Pr$
3	$v \quad   M(v) \Rightarrow L(v)$	$\forall Bv/x(1)$
4	$\quad   L(v) \Rightarrow S(v)$	$\forall Bv/x(2)$
5	$\quad   M(v) \Rightarrow S(v)$	$KR(3,4)$
6	$\forall x(M(x) \Rightarrow S(x))$	$\forall Ex/v(5)$

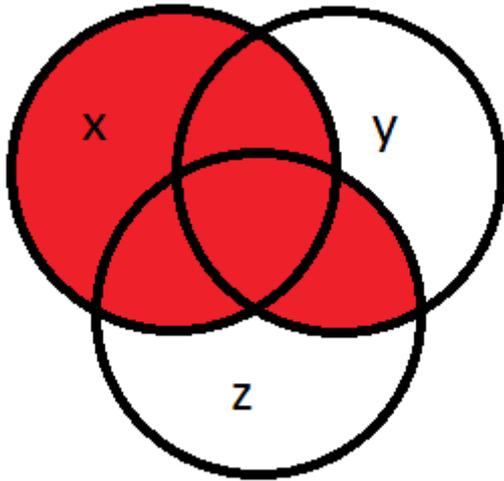
7)

$$\forall x(F(x) \Rightarrow \neg G(x)), F(a) \wedge G(b) \quad \vdash \exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$$

1	$\forall x(F(x) \Rightarrow \neg G(x))$	$Pr$
2	$F(a) \wedge G(b)$	$Pr$
3	$F(b) \Rightarrow \neg G(b)$	$\forall B b/x(1)$
4	$F(a)$	$\wedge B(2)$
5	$G(b)$	$\wedge B(2)$
6	$\neg F(b)$	$Modus Tollens(3,5)$
7	$F(a) \wedge \neg F(b)$	$\wedge E(4,6)$
8	$\exists x F(x) \wedge \neg F(b)$	$\exists Ex // a$
9	$\exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$	$\exists Ex // b$

8)

Beide Venn-Diagramme sehen gleich aus, nämlich:



9)

$$M1 = \{x, y, z\}$$

$$M2 = \{a, b, c, d\}$$

Kartesisches Produkt:

$$\{\langle x, a \rangle, \langle x, b \rangle, \langle x, c \rangle, \langle x, d \rangle, \langle y, a \rangle, \langle y, b \rangle, \langle y, c \rangle, \langle y, d \rangle, \langle z, a \rangle, \langle z, b \rangle, \langle z, c \rangle, \langle z, d \rangle\}$$

10)

$$\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 5, 6 \rangle\}$$

11/a)

R ist eine strikte partielle Ordnung gdw. R irreflexiv + transitiv + asymmetrisch ist.

Beispiel: Menge a ist eine echte Teilmenge von Menge b.

11/b)

R ist eine strikte totale Ordnung gdw. R eine strikte partielle Ordnung + verbunden ist.

Beispiel: Zahl a ist größer als Zahl b.

11/c)

R ist eine Äquivalenzrelation gdw. R reflexiv + transitiv + symmetrisch ist.

Beispiel: a ist genauso als wie b.

**12)**

siehe:

[http://www.cl.uni-heidelberg.de/courses/ws15/logik/Woche01/Logik%20Herweg%202015\\_16%2000%20Vorkurs%20Mengen%20Relationen%20Funktionen.pdf](http://www.cl.uni-heidelberg.de/courses/ws15/logik/Woche01/Logik%20Herweg%202015_16%2000%20Vorkurs%20Mengen%20Relationen%20Funktionen.pdf)

Folie 13 ff.

**13)**

siehe:

<http://www.cl.uni-heidelberg.de/courses/ws14/logik/material/tutorium7-2.pdf>

Folie 24 ff.